**Texto

Descripción generada automáticamente con confianza bajaFacultad de Filosofía,**

**Educación y**

**Ciencias Humanas**

**Unidad 3. Métodos decisorios en LC**

**Material teórico 1: Tablas de verdad**

La semántica formal expuesta en la unidad anterior permite desarrollar un procedimiento mecánico (algoritmo) para calcular los valores o que toma según las distintas estructuras que su léxico permite. La cantidad de estructuras que deben considerarse para está dada por la combinatoria de los dos valores posibles para las letras oracionales de su léxico (es decir, ). Este procedimiento se conoce como tablas de verdad.

|  |
| --- |
| ***Def. 1. Tabla de verdad***  Algoritmo para calcular los valores o que toma una fórmula en lógica de conectores (LC) según todas las estructuras posibles considerando su léxico y limitándose a él. |

Dado que la semántica desarrollada para la LC puede pensarse alternativamente en términos de modelos, las tablas de verdad pueden definirse también como un algoritmo para calcular todas las posibles que son modelo de y todas las que no lo son, es decir, sus contramodelos, considerando el léxico de y limitándose a él.

**1. Procedimiento decisorio por tablas de verdad: paso a paso**

Se explicará la elaboración de la tabla de verdad para . La primera fila de la tabla consignará, de izquierda a derecha y en una columna distinta cada una, las letras oracionales del léxico de en orden alfabético y, finalmente, la fórmula a evaluar:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *P* |  |  |

A continuación, en cada una de las siguientes filas se desarrollará un cálculo lineal de valores como los aprendidos en la unidad 3. Por lo tanto, cada combinación de valores consignada debajo de las letras oracionales de es una estructura distinta sobre la que se realizará el cálculo correspondiente. La siguiente es la regla para determinar la cantidad de filas para cálculo de valores que se debe consignar en la tabla de verdad de cualquier fórmula de LC:

|  |
| --- |
| El número total de filas de cálculo de valores para es igual , donde es el número de letras oracionales del léxico de . |

Así, la tabla para tendrá cuatro filas de cálculo de valores,en tanto su léxico tiene dos letras oracionales y :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *P* |  |  |
| V | V |  |
| V | F |  |
| F | V |  |
| F | F |  |

El siguiente paso consiste en realizar el cálculo de valores correspondiente a cada fila. No debe olvidarse que el valor de en cada fila aparece en la columna ubicada debajo de su operador principal:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *P* |  |  |
| V | V | F V V V |
| V | F | V V F F |
| F | V | V F F V |
| F | F | V F F F |

La distribución de valores de según todas las estructuras posibles según su léxico y solo según estas es: FVVV. Esto equivale a afirmar que la primera estructura no es modelo de , pero las siguientes tres sí lo son. A continuación, se construirá directamente la tabla de verdad de . tiene tres letras oracionales distintas y, por lo tanto, la cantidad de filas para cálculo de valores a considerar es 8 (23). Además, su operador principal es la condicional, así que los valores completos de se consignarán en la columna debajo de ella:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| V | V | V | F V V F V V V |
| V | V | F | F V V V F V V |
| V | F | V | F V V F V V F |
| V | F | F | F V V V F V F |
| F | V | V | V F F F V V V |
| F | V | F | F F V V F V V |
| F | F | V | V F F F V F F |
| F | F | F | F F V V F V F |

La distribución de valores de según todas las estructuras posibles y relevantes es: VVVVVVFV. Por tanto, tiene siete estructuras que la modelan y una que no lo hace.

Ya que la LC es un lenguaje funcionalmente completo, las tablas de verdad permiten determinar con certeza todas y cada uno de los valores posibles para cualquier fórmula exclusivamente elaborada con su alfabeto y sus reglas de formación. En otras palabras, este es un método decisorio que permite calcular en una cantidad finita de tiempo todos los modelos y contramodelos para cualquiera de sus fórmulas[[1]](#footnote-1).

Esto es posible por la recursividad de las reglas de interpretación *ri1-ri6*, las cuales puede reformularse en un formato de tablas de verdad:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. *sii es V según*  |  |  | | --- | --- | |  |  | | V | V | | F | F |  1. *sii*  |  |  | | --- | --- | |  |  | | V | F | | F | V |  1. *sii* y  |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | | V | V | V | | V | F | F | | F | V | F | | F | F | F |  1. *sii* o  |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | | V | V | V | | V | F | V | | F | V | V | | F | F | F |  1. *sii* o  |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | | V | V | V | | V | F | F | | F | V | V | | F | F | V |  1. *sii* y , o y  |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | | V | V | V | | V | F | F | | F | V | F | | F | F | V | |

**2. Consistencia e inconsistencia semántica**

En tanto método decisorio, las tablas de verdad permiten calcular la consistencia lógica de cualquier conjunto de fórmulas y la consecuencia lógica de cualquier argumento formalizado. Esto es así porque la interpretación semántica ofrecida en la unidad anterior permite definir estas propiedades en términos de valores o modelos**.** En esta sección, se definirá la consistencia e inconsistencia semántica. Cada definición se formulará desde tres enfoques equivalentes.

|  |
| --- |
| ***Def. 2.* Consistencia semántica** |
| **I. En conjuntos de una fórmula (fórmulas únicas)** |
| **es consistente semánticamente *sii***  **En términos de valores**  Al menos una da el valor a  **En términos de modelos**  Al menos una es modelo de .  **En tablas de verdad**  tiene el valor en al menos una fila. |
| **II. En conjuntos de más de una fórmula** |
| **es consistente semánticamente *sii***  **En términos de valores**  Al menos una da el valor a conjuntamente.  **En términos de modelos**  Al menos una es modelo de conjuntamente.  **En tablas de verdad**  tienen juntas el valor en al menos una fila. |

|  |
| --- |
| ***Def. 3.* Inconsistencia semántica** |
| **I. En conjuntos de una fórmula (fórmulas únicas)** |
| **es inconsistente semánticamente *sii***  **En términos de valores**  Ninguna da el valor a .  **En términos de modelos**  Ninguna es modelo de .  **En tablas de verdad**  no tiene el valor en ninguna fila. |
| **II. En conjuntos de más de una fórmula** |
| **es inconsistente semánticamente *sii***  **En términos de valores**  Ninguna da el valor a conjuntamente.  **En términos de modelos**  Ninguna es modelo de conjuntamente.  **En tablas de verdad**  no tienen juntas el valor en ninguna fila. |

Teniendo en cuenta estas definiciones, si se revisan las tablas de verdad de y de la sección anterior, se concluye que, a pesar de tener un distinto número de modelos, ambas son consistentes. Por otro lado, si se analiza la fórmula , se puede demostrar que es inconsistente o, en otras palabras, que no tiene modelos:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| V | V F F V |
| F | F F V F |

Toda propiedad cumplida por una fórmula en LC depende exclusivamente de las reglas *ri1-ri6*, al margen de la en la que se la evalúe. Así, lo único que interesa para calcular dichas propiedades es tomar todas las combinaciones posibles de los valores o asignables a las letras oracionales de un léxico determinado[[2]](#footnote-2). Dado que la LC es un sistema bivalente, cualquier fórmula molecular toma también cualquiera de esos dos valores. Así, la forma será inconsistente, al margen de la fórmula con la que se reemplace , sea esta atómica, como ,o molecular, como . Esta, por ejemplo, da lugar a , cuya inconsistencia se puede calcular en una tabla:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| V | V | F F F V F V F F F V |
| V | F | F F V V F V F F V V |
| F | V | V F F F F V V F F F |
| F | F | V V V V F F V V V V |

A continuación, tómense en cuenta las siguientes fórmulas:

Se calculará si el conjunto es consistente o no a través de una tabla de verdad. Para ello, se debe consignar, en la primera celda de la primera columna, el léxico de dos letras oracionales compartido por , y . En las siguientes tres columnas, se establecerán las fórmulas , y , en ese orden. A continuación, se elaborarán filas debajo, se consignarán todas estructuras posibles y relevantes debajo de las celdas de las letras oracionales, y se operarán los cálculos correspondientes debajo de la celda de cada fórmula:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| V | V | F V **V** V | V **V** V | **V** F V |
| V | F | F V **F** F | V **F** F | **V** F V |
| F | V | V F **V** V | F **V** V | **F** V F |
| F | F | V F **V** F | F **V** F | **F** V F |

La primera fila de la tabla da a , y el valor ; por lo tanto, el conjunto que conforman es consistente. Esto equivale a decir que la estructura de la primera fila de valores es modelo de . Ahora, se puede dar la definición de **ejemplo** de un conjunto de fórmulas:

|  |
| --- |
| ***Def. 4. Ejemplo***  Un ejemplode demuestra que este conjunto es consistente. Consiste en la reproducción de un cálculo lineal de valores según las siguientes reglas:  *i.* Para , se hace el cálculo a partir de una que es modelo de  *ii.* Para , se hace el cálculo a partir de una que es modelo de conjuntamente |

De acuerdo con esto, la tabla de consignada más arriba revela su único ejemplo en la fila rellenada con azul. En general, cada ejemplo de un conjunto consistente en LCse corresponde directamente con una fila de su tabla de verdad. A continuación, se determinará si el conjunto es consistente o no:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* |  |  |  |
| V | V | F V **V** V | V **V** V | V **F** F V |
| V | F | F V **F** F | V **F** F | V **V** V F |
| F | V | V F **V** V | F **V** V | F **F** F V |
| F | F | V F **V** F | F **V** F | F **F** V F |

No hay una estructura que haga verdaderas a , y conjuntamente; así que es inconsistente o, lo que es lo mismo, no tiene modelos ni hay ejemplos de él.

: g.c. 0

g.c. 0

g.c. 1

g.c. 2

: g.c. 2

: g.c. 3

: g. c. 3

: g. c. 3

**3. Validez e invalidez semántica**

En esta sección se expondrán las nociones semánticas que aíslan los conceptos intuitivos de validez e invalidez de argumentos no hipotéticos e hipotéticos.

|  |
| --- |
| ***Def. 5.* Validez semántica** |
| **I. En argumentos no hipotéticos (fórmulas únicas)** |
| **es válida semánticamente (tautológica) *sii***  **En términos de valores**  Toda da el valor a .  **En términos de modelos**  Toda es modelo de .  **En tablas de verdad**  tiene el valor en todas las filas. |
| **II. En argumentos hipotéticos** |
| **es válido semánticamente *sii***  **En términos de valores**  Ninguna da el valor a y el valor a conjuntamente.  **En términos de modelos**  Ninguna es modelo de y contramodelo de a la vez.  **En tablas de verdad**  En ninguna fila tienen juntas el valor y el valor a la vez. |

|  |
| --- |
| ***Def. 6.* Invalidez semántica** |
| **I. En argumentos no hipotético (fórmulas únicas)** |
| **es inválida semánticamente (no tautológica) *sii***  **En términos de valores**  Al menos una da el valor a .  **En términos de modelos**  Al menos una es contramodelo de .  **En tablas de verdad**  tiene el valor en al menos una fila. |
| **II. En argumentos hipotéticos** |
| **es inválido semánticamente *sii***  **En términos de valores**  Al menos una da el valor a conjuntamente y el valor a *.*  **En términos de modelos**  Al menos una que es modelo de es contramodelo de .  **En tablas de verdad**  En al menos una fila tienen juntas el valor y el valor a la vez. |

Según estas definiciones, se puede probar, por ejemplo, que la negación de la sección anterior, es decir, , es tautológica:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| V | V V F F V |
| F | V F F V F |

En general, cualquier fórmula con la forma será tautológica. Así, por ejemplo, lo demuestra la tabla de verdad de la negación de de la sección anterior:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| V | V | V F F F V F V F F F V |
| V | F | V F F V V F V F F V V |
| F | V | V V F F F F V V F F F |
| F | F | V V V V V F F V V V V |

En ambos casos, decir que la negación de y son tautologías equivale a decir que toda estructura para sus respectivos léxicos es modelo de ellas. Considérese, a continuación, el argumento hipotético , . La primera fila de la tabla debe organizarse de la misma manera que en el caso de los conjuntos no unitarios de fórmulas. Así, la primera columna es para las letras oracionales del léxico compartido en orden alfabético; las siguientes, una para cada premisa; y, la última, para la conclusión del argumento. Los valores que se calculen se consignarán en las columnas debajo de las fórmulas a las que corresponden:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* |  |  |  |
| V | V | V **V** V | **F** V | **F** V |
| V | F | V **F** F | **V** F | **F** V |
| F | V | F **V** V | **F** V | **V** F |
| F | F | F **V** F | **V** F | **V** F |

La única que asigna el valor a las asunciones conjuntamente, es decir, la de la última fila, asigna el mismo valor a la conclusión. En otras palabras, esta , que es el único modelo de las premisas, es también modelo de la conclusión. Por ello, **, es válido**. Ahora considérese , y la siguiente tabla para determinar si es válido o no:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* |  |  |  |
| V | V | V **V** V | **F** V | **F** V |
| V | F | V **F** F | **F** V | **V** F |
| F | V | F **V** V | **V** F | **F** V |
| F | F | F **V** F | **V** F | **V** F |

La tercera , que esla única que asigna el valor a sus premisas conjuntamente, asigna el valor a la conclusión. Así, **, es inválido**. Finalmente, se debe definir el concepto de contraejemplo de un argumento:

|  |
| --- |
| ***Def. 7. Contraejemplo***  Un contraejemplode demuestra que este es inválido semánticamente. Consiste en la reproducción de un cálculo lineal de valores según las siguientes reglas:  *i.* Para , se hace a partir de una que es contramodelo de .  *ii.* Para , se hace a partir de una que es modelo de y contramodelo de . |

En la última tabla, la fila rellenada de verde es un contraejemplo que demuestra que , es inválido.

**4. Implicación y equivalencia**

Se introducirán dos conceptos semánticos más: implicación y equivalencia. Ambos son evaluables a través de tablas de verdad y son propiedades semánticas de pares de fórmulas.

|  |
| --- |
| ***Def. 8. Implicación*** |
| **En pares de fórmulas** |
| **implica a *sii***  **En términos de valores**  Ninguna da el valor a y el valor a a la vez.  **En términos de modelos**  Ninguna es modelo de y contramodelo de a la vez.  **En tablas de verdad**  Ninguna fila da el valor a y el valor F a a la vez. |

Considérese, primero las siguientes fórmulas:

A continuación, se determinará si implica a a través de una tabla de verdad. Para elaborar la primera fila, basta con consignar, en la primera columna, el léxico compartido por y ; en la siguiente, ; y, en la última, . En las siguientes filas se consignarán lo valores que asumen las fórmulas según cada estructura :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| V | V | **V** | V **V**  V |
| V | F | **V** | V **V**  F |
| F | V | **F** | F **V**  V |
| F | F | **F** | F **F**  F |

Todas las estructuras que asignan el valor a le asignan el mismo valor a ; es decir, todos los modelos de son también modelos de . Por ello, implica a . Considérese, sin embargo, si la relación inversa se sostiene; en otras palabras, demuéstrese si implica a

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| V | V | V **V** V | **V** |
| V | F | V **V** F | **V** |
| F | V | F **V**  V | **F** |
| F | F | F **F** F | **F** |

no implica a = es inválido

La tabla revela que hay una que asigna el valor a y, el valor , a . Por ello, no implica a *.* La fila resaltada de naranja es un contraejemplo para esta relación de implicación.

|  |
| --- |
| ***Def. 9. Equivalencia*** |
| **En pares de fórmulas** |
| **equivale a *sii***  **En términos de valores**  Toda da los mismos valores a y .  **En términos de modelos**  y tienen los mismos modelos y contramodelos.  **En tablas de verdad**  y tienen los mismos valores en todas las filas. |

Tómese en cuenta las siguientes fórmulas:

Ahora se determinará si son equivalentes a través de una tabla de verdad. Para elaborar la primera fila, basta con consignar, en las primeras columnas, el léxico compartido por y ; en la siguiente, ; y, en la última, . En las siguientes filas se calcularán lo valores que asumen las fórmulas según cada :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| V | V | F V **V** V | V **V** V |
| V | F | F V **F** F | V **F** F |
| F | V | V F **V** V | F **V** V |
| F | F | V F **V** F | F **V** F |

equivale a = implica a y viceversa =

es válido y es válida

Todas las estructuras asignan los mismos valores a y . Por ello, y son equivalentes. Para finalizar considérese otro par de fórmulas:

Ahora se determinará si son o no equivalentes a través de una tabla de verdad:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| V | V | F V **V** F V | V **V** V |
| V | F | F V **V** V F | V **F** F |
| F | V | V F **F** F V | F **V** V |
| F | F | V F **V** V F | F **V** F |

Hay dos estructuras que asignan a y valores distintos. Por ello***,*** yno son equivalentes. Puede tomarse cualquiera de las filas resaltadas como un contraejemplo de la equivalencia entre ambas fórmulas.

**Glosario de términos**

* Tablas de verdad
* Consistencia semántica
* Inconsistencia semántica
* Ejemplo
* Validez semántica
* Invalidez semántica
* Tautología
* Contraejemplo
* Implicación
* Equivalencia

**Bibliografía sugerida**

* Hodges, W. (1983). Elementary Predicate Logic. En *The Handbook of Philosophical Logic*. Gabbay, D. y F. Guenthner (Eds.), vol. 1. Propositional Logic. Secciones 1-5, pp. 5-20.
* Manzano, M. (2000). *Lógica para principiantes*. Capítulo 3. Semántica, pp. 29-44.

**Anexo**

**Propiedades semánticas según la condición que cumplen en tablas de verdad**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Objeto al que se aplica** | **Propiedad semántica** | **Condición que debe cumplir en su tabla** |
| Cualquier **conjunto unitario** de fórmulas en *LC* | Consistencia semántica | tiene el valor en al menos una fila. |
| Inconsistencia semántica | no tiene el valor en ninguna fila. |
| Cualquier **conjunto no unitario** de fórmulas en *LC* | Consistencia semántica | tienen juntas el valor en al menos una fila |
| Inconsistencia semántica | no tienen juntas el valor en ninguna fila |
| Cualquier **argumento no hipotético** en *LC* | Validez semántica  (tautología) | tiene el valor en todas las filas. |
| Invalidez semántica  (no tautología) | tiene el valor en al menos una fila. |
| Cualquier **argumento hipotético** en *LC* | Válidez semántica | En ninguna fila tienen juntas el valor y tiene el valor a la vez. |
| Inválidez semántica | En al menos una fila tienen juntas el valor y tiene el valor a la vez. |
| Cualquier **par de fórmulas** y en *LC* | Implicación | En ninguna fila tiene el valor y tiene el valor a la vez. |
| No implicación | En al menos en una fila tiene el valor y tiene el valor a la vez |
| Equivalencia | y tienen los mismos valores en todas las filas. |
| No equivalencia | En al menos una fila y tienen valores distintos. |

1. Esta propiedad se llama decidibilidad. Tanto la LC como un fragmento más amplio de la LPO que la supone llamado lógica de predicados monarios (LPM) son decidibles. Sin embargo, si bien comparten los árboles semánticos como métodos decisorios, las tablas de verdad son exclusivas de la LC. En la unidad 3, se presentarán los árboles semánticos como un tipo de prueba hipotética de validez y consistencia interpretable en términos de valores *V/F*. Los árboles son pruebas matemáticas tomadas como un método decisorio para la LPM. [↑](#footnote-ref-1)
2. De ahí que se pueda evaluar la posibilidad y la necesidad de una fórmula en términos de la lógica clásica. [↑](#footnote-ref-2)